حل أسئلة امتحان الرياضيات للصف الثالث الثانوي العلمي دورة ٢٠١١

أولاً: أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين: (٦ درجات)

١- ليكن A , B حدثين من فضاء احتمالي $(S , P (S) , P)$ بحيث :

$$P (A \setminus B) = \frac{1}{3} \quad , \quad P (B \setminus A) = \frac{4}{15} \quad , \quad P_A (B) = \frac{8}{15}$$

والمطلوب حساب : $P (A) \quad , \quad P (A \cap B) \quad , \quad P (B) \quad , \quad P_B (A)$

$$P (A \setminus B) = P (A \cap B') = P (A) - P (A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$P (B \setminus A) = P (A' \cap B) = P (B) - P (A \cap B) = \frac{4}{15}$$

$$P_A (B) = \frac{P (A \cap B)}{P (A)} = \frac{8}{15} \Rightarrow P (A \cap B) = \frac{8}{15} P (A)$$

$$P (A) - \frac{8}{15} P (A) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{7}{15} P (A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P (A) = \frac{5}{7}$$

$$P (A \cap B) = \frac{8}{15} \times \frac{5}{7} = \frac{8}{21}$$

$$P (B) = \frac{4}{15} + \frac{8}{21} = \frac{68}{105}$$

$$P_B (A) = \frac{P (A \cap B)}{P (B)} = \frac{8}{21} \times \frac{105}{68} = \frac{10}{17}$$

٢- لتكن الدائرة $C(O, R)$ المعينة بالمعادلة : $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ عين مركز ونصف قطر الدائرة .

ثم أوجد معادلة كل مماس للدائرة C يوازي المستقيم $d : \; 4x - 3y + 7 = 0$.

$$x_0 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$y_0 = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$O (-1 , 3)$$

$$R = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + 6} = 4$$

معادلة حزمة المستقيمات الموازية للمستقيم: $4x - 3y + h = 0$

$$\frac{| -4 - 9 + h |}{\sqrt{16 + 9}} = 4$$

$$| h - 13 | = 20 \Rightarrow$$

$$h_1 = 33 \quad , \quad h_2 = -7$$

$$d_1 : \quad 4x - 3y + 33 = 0$$

$$d_2 : \quad 4x - 3y - 7 = 0$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (9 درجات للأول ، 8 للثاني ، 8 للثالث ، 7 للرابع)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=ln\left(e^{x}+1\right)$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، استنتج أن للخط C مقارباً يوازي المحور $x'x$. وادرس جهة تقعر الخط C

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=ln(0+1)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$f'(x)>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

يوجد للخط C مقارب معادلته $y=0$ يوازي المحور $x'x$.

جهة التقعر:

$$f''(x)=\frac{e^{x}\left(e^{x}+1\right)-e^{x}\cdot e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$f''(x)>0$$

الخط C يتقعرً نحو oy^{+}.

المقارب المائل:

$$f(x)-y=ln\left(e^{x}+1\right)-x=ln\left(e^{x}+1\right)-ln\left(e^{x}\right)=ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}}\right)=ln\left(1+e^{-x}\right)$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}\infty}\left[f(x)-y\right]=ln(1+0)=0$$

إذن Δ مقارب للخط C عند $+\infty$

الوضع النسبي:

$$e^{-x}>0\Rightarrow 1+e^{-x}>1\Rightarrow ln\left(1+e^{-x}\right)>0\Rightarrow f(x)-y>0$$

C يقع فوق Δ

التمرين الثاني: أوجد معادلة القطع الناقص الذي ذروتاه: $A'(-4,-1)$ ، $A(6,-1)$ وتباعده المركزي $e=\frac{3}{5}$ وأوجد معادلة دائرته الأصلية ، ثم احسب r , r' لنقطة منه فاصلتها $x=4$.

$y_A = y_{A'} = y_0 = -1$ المحور المحرقي يوازي $x'x$

$$x_0 = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$$

$$AA' = 2a \Rightarrow 10 = 2a \Rightarrow a = 5$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{c}{5} \Rightarrow c = 3$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

دائرته الأصلية:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

نصفا القطرين المحرقيين:

$$r = a - \frac{c}{a}(x-x_0) = 5 - \frac{3}{5}(4-1) = \frac{16}{5}$$

$$r' = a + \frac{c}{a}(x-x_0) = 5 + \frac{3}{5}(4-1) = \frac{34}{5}$$

التمرين الثالث: ABC مثلث تحققت فيه العلاقة : $4\cos^2 A - 2\sqrt{3}\sin A\cdot\cos A + 2\sin^2 A = 1$

برهن أن $A = 60°$ ثم حل المثلث إذا علمت فيه : $S = 8\sqrt{3}$, $b - c = R$

$$4\cos^2 A - 2\sqrt{3}\sin A\cdot\cos A + 2\sin^2 A = 1$$

$$4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2A\right) - 2\sqrt{3}\,.\frac{1}{2}\sin 2A + 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2A\right) = 1$$

$$\sqrt{3}\sin 2A - \cos 2A = 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A - \frac{1}{2}\cos 2A = 1$$

$$\sin(2A - 30°) = 1$$

$$2A - 30° = 90°$$

$$A = 60°$$

$$b - c = R$$

$$2R\sin B - 2R\sin C = R$$

$$2(\sin B - \sin C) = 1$$

$$4\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2} = 1$$

$$4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2} = 1$$

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{B-C}{2} = 30°$$

$$B - C = 60° \quad , \; A + B + C = 180°$$

$$B + C = 120°$$

$$B = 90° \,,\; C = 30°$$

$$S = 2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$$

$$8\sqrt{3} = 2R^2.\frac{\sqrt{3}}{2}.1.\frac{1}{2}$$

$$R = 4$$

$$a = 2R\sin A = 2.4.\frac{\sqrt{3}}{2} = .4\sqrt{3}$$

$$b = 2R\sin B = 2.4.1 = 8$$

$$c = 2R\sin C = 2.4.\frac{1}{2} = 4$$

التمرين الرابع: مكعب $ABCD \quad A'B'C'D'$ طول حرفه (4)

1)احسب مساحة سطحه الكلي وحجمه

2)احسب حجم جذع المخروط الذي قاعدته الصغرى تمس داخلاً أضلاع الوجه $A'B'C'D'$ وقاعدته الكبرى تمر من رؤوس الوجه $ABCD$

3)احسب قياس زاوية المستقيمين المتخالفين : (CD') , (DB) .

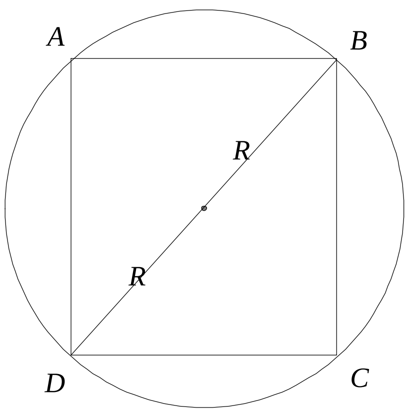
$$S = 6a^2 = 96 \qquad v = a^3 = 64$$

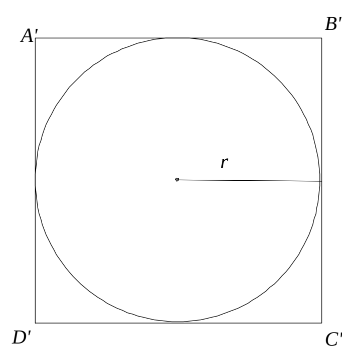
$$h = a = 4$$

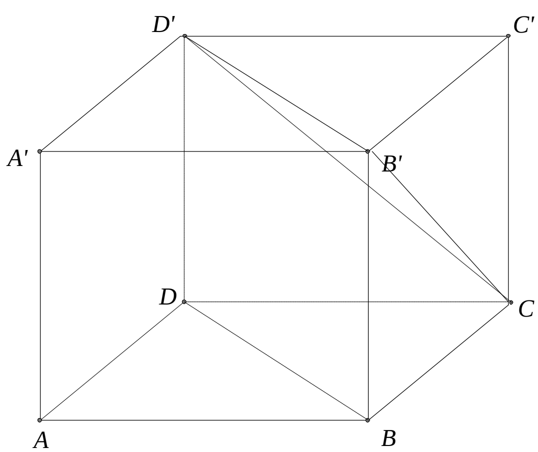
$$r = \frac{a}{2} = 2 \quad ,$$

$$2R = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}.a \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{p}{3} h\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right) = \frac{p}{3} \times 4\left(8 + 4 + 4\sqrt{2}\right) = \frac{16p}{3}\left(3 + \sqrt{2}\right)$$







$[DD']$ يساير $[BB']$ فالرباعي $DBB'D'$ متوازي أضلاع

فيه زاوية قائمة فهو مستطيل ينتج: $[D'B']$ يساير $[DB]$

ينتج أن زاوية المستقيمين المتخالفين (CD') و (DB) تساويالزاوية $C\hat{D}'B'$

و هي $60°$ لأنها زاوية في المثلث المتساوي الأضلاع $CD'B'$ لأن أطوال أضلاعه أقطار في مربعات طبوقة.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (10درجات للأولى ، 13 درجة للثانية)

المسألة الأولى:

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}$

١) بين أن $adj(A)=A$ ثم أثبت أن $A^2=I$ حيث I المصفوفة الواحدية.

٢) أوجد A^3 ثم أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي أن $A^{2n+1}=A$ وذلك أياً كان $n\in N^*$

(1

$$adj(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 4 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 4\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}=A$$

$$A^2=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16-3-12 & 12+0-12 & 12-3-9\\ -4+0+4 & -3+0+4 & -3+0+3\\ -16+4+12 & -12+0+12 & -12+4+9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

(2

$$A^3=A^2.A=I.A=A=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$: $l_1=A^{2(1)+1}=A^3=A=l_2$

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n\in N^*$ أي : $A^{2n+1}=A$

نبرهن اعتماداً على العلاقة السابقة صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي نبرهن : $A^{2n+3}=A$

$$l_1=A^{2n+3}=A^{(2n+1)+(2)}=A^{2n+1}.A^2=A.I=A=l_2$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-5$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، دل على القيمة الصغرى محلياً للتابع f . واستنتج أن للخط البياني C مقارب يوازي $y'y$.

2) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما x_1 يحقق $0<x_1<1$ ثم أوجد الجذر الآخر x_2 .

3) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-5$ مقارب للخط C .

4) ارسم كل مقارب وجدته و ارسم C .

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$, $x=4$.

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

فالمستقيم $x=0$ مقارب يوازي $y'y$.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$$

ينعدم $f'(x)$ عندما $x\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x=1$

$$f(1)=-2$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=-2$ قيمة صغرى محلياً

(2

f مستمر ومطرد تماماً على $]0,1[$ و $0\in f(]0,1[)=]-2,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد x_1 على المجال $]0,1[$ يحقق $0<x_1<1$.

f مستمر ومطرد تماماً على $]1,+\infty[$ و $0\in f(]1,+\infty[)=]-2,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد x_2 على المجال $]1,+\infty[$.

إيجاد الجذر x_2: بالتجريب:

$$f(2)=2+\frac{2}{\sqrt{2}}-5=-3+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$f(3)=3+\frac{2}{\sqrt{3}}-5=-2+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f(4)=4+\frac{2}{\sqrt{4}}-5=4+1-5=0$$

فالجذر هو $x_2=4$

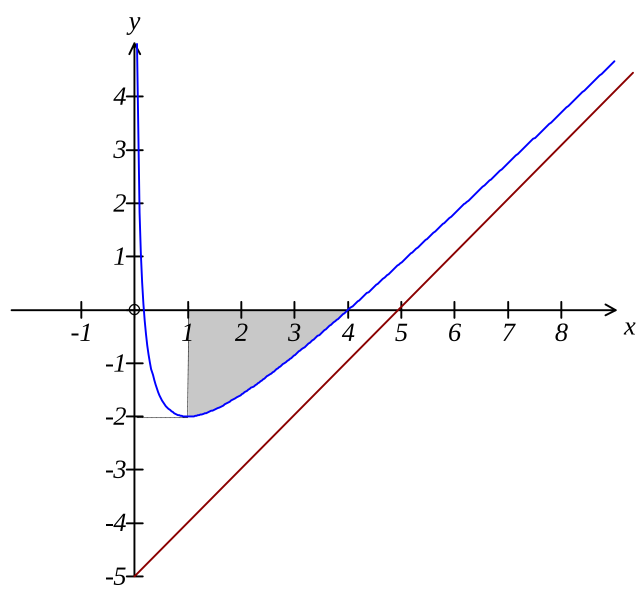
(3

$$f(x)-y=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left[f(x)-y\right]=0$$

فالمستقيم $y=x-5$ مقارب مائل عند $+\infty$

(4



(5

$$S=\int_1^4 -f(x)\,dx$$

$$=\int_1^4\left(-x-2(x)^{-\frac{1}{2}}+5\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-4\sqrt{x}+5x\right]_1^4$$

$$=[-8-8+20]-\left[-\frac{1}{2}-4+5\right]=\frac{7}{2}$$